

Cevap Anahtarı

Adı Soyadı:
Numarası:

21.01.2019

2018-2019 GÜZ DÖNEMİ GRUP TEORİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) Bir G grubu A kümesi üzerine etki etsin. Her $a \in A$ için

$$G_a = \{g \in G : ga = a\}$$

kümesinin G 'nin bir alt grubu olduğunu gösteriniz.

b) G bir grup H G 'nin alt grubu olsun. $A = \{aH : a \in G\}$ olmak üzere $*$ fonksiyonu $\forall g \in G, \forall aH \in A$ için $g*(aH) = (ga)H$ ile tanımlanıyor. $*$ fonksiyonu G 'nin A üzerine bir etkisidir, gösteriniz.

2) G sonlu bir p -grup ve $G \neq \{e\}$ olsun. O halde $Z(G) \neq \{e\}$ olduğunu gösteriniz.

3) Mertebesi 125 olan grup basit midir? Açıklayınız.

4) $G = A_4$ olsun. $\alpha = (1\ 2\ 3)$ elemanı için $Cl_G(\alpha)$ ve $C_G(\alpha)$ kümelerini belirleyiniz.

5) \mathbb{Z}_9^* grubu veriliyor.

a) Devirli midir? Araştırınız.

b) Bütün alt gruplarını bulunuz.

NOT: Sadece 4 soru seçip cevaplayınız.

1 a) $\forall a \in A$ için $ea = a$ olduğundan $G_a \neq \emptyset$. $\forall g, h \in G_a$ olsun. $ga = a, ha = a$ $(gh)a = g(ha) = ga = a$ olup $gh \in G_a$. $ga = a \Rightarrow a = g^{-1}a$ olup $\forall g \in G_a$ için $g^{-1} \in G_a$ o halde $G_a \leq G$ dir.

b) $G \times A \rightarrow A$

$$(g, aH) \rightarrow g * (aH) = (ga)H$$

i) $\forall e \in G$ için $e * (aH) = (ea)H = aH$

ii) $\forall g, h \in G$ için ve $\forall aH \in A$ için

$$\begin{aligned} (gh) * (aH) &= ((gh)a)H = (g(ha))H = g * (ha)H \\ &= g * (h * (aH)) \end{aligned}$$

2) $Z(G) = G$ ise ağık. $Z(G) \neq G$ olsun, $|G| = p^m$ oldıdan G bir p grup. G kendi üzerine esleniklenme biçiminde etki etsin. $|G| = |Z(G)| \pmod{p}$ olup $p^m \equiv |Z(G)| \pmod{p}$
 $p^m = |Z(G)| + kp$, $m \geq 1$ oldıdan $p | |Z(G)|$ ve $|Z(G)| > 1$ dir.

3) $|G| = 125 = 5^3$ olup G bir p -grup tur. O zaman $Z(G) \neq \{e\}$ dir. Ayrıca $Z(G) \triangleleft G$ olduğundan G basit grup değildir.

4) $C_G(\alpha) = \{g \alpha g^{-1} \mid g \in G\}$ $C_G(\alpha) = \{g \in G \mid g\alpha = \alpha g\}$

olduğundan

$C_G(\alpha) = \{(123), (134), (142), (243)\}$ olur.

$C_G(\alpha) = \{(123), I, (132)\}$

5) $|Z_G^*| = \varphi(9) = 3^2 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 6$

$Z_G^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 7$$

$$2^5 = 5$$

$$2^6 = 1$$

devirlidir. $Z_G^* = \langle \bar{2} \rangle$

Alt gruplarını bulalım. $o(2^k) = \frac{6}{(k, 6)}$

$$k=1$$

$$k=2$$

$$k=3$$

$$k=6$$

↓ böylelikle bütün alt gruplar

$\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{4} \rangle, \langle \bar{8} \rangle, \langle \bar{1} \rangle$ dir.